LIMITI E CONTINUITÀ DELLE FUNZIONI REALI DI UNA VARIABILE REALE

Per una funzione reale si possono dare nove definizioni di limite: convergenza, divergenza a $+\infty$ e a $-\infty$, al tendere della variabile x a un valore c, a $+\infty$ o a $-\infty$. Come vedremo, interverrà il termine *definitivamente* che cambierà significato nei vari casi. Precisamente, studiare il limite di una funzione significa vedere qual è il comportamento della funzione stessa quando la variabile si avvicina ("tende") ad un certo punto, ovvero quando x appartiene ad un intorno di tale punto. Le nove definizioni si differenziano l'una dall'altra solo per il diverso significato che assume di volta in volta il termine "definitivamente".

Limite al tendere di x a c. Data una funzione reale definita in un insieme $X \subseteq \mathbf{R}$, se $c \in DX$ si definisce il limite di f al tendere di x a c nel seguente modo.

i) si dice che f converge al numero l al tendere di x a c e si scrive $\lim_{x\to c} f(x) = l \in \mathbf{R}$ se $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : x \in X, x \neq c, |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$, ovvero $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$

ii) si dice che f diverge a $+\infty$ al tendere di x a c e si scrive $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$ se $\forall k > 0 \quad \exists \delta > 0 : x \in X, x \neq c, |x - c| < \delta \Rightarrow f(x) > k$

iii) si dice che f diverge a $-\infty$ al tendere di x a c e si scrive $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$ se $\forall k > 0 \quad \exists \delta > 0 : x \in X, x \neq c, |x - c| < \delta \Rightarrow f(x) < -k$

Come si vede da queste definizioni, la condizione di limite è, ad esempio nel caso della convergenza, $|f(x) - l| < \varepsilon$: essa deve essere verificata *in un opportuno intorno di* c, questo si può anche esprimere dicendo che la condizione di limite è verificata *definitivamente*. Dunque, per potere prendere in considerazione il calcolo del limite, la f deve esistere in un intorno di c, quindi il fatto che $c \in DX$ è fondamentale.

Se è verificata una delle tre condizioni descritte sopra, la funzione è detta regolare al tendere di x a c, una funzione non regolare è anche detta oscillante.

È interessante notare che, nelle precedenti definizioni, non è richiesto che la condizione di limite sia verificata anche nel punto c. Ad esempio, posto $f(x) = 1$ se $x \neq 0$, $f(0) = 4$, si ha $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ anche se la condizione di limite non viene verificata nel punto $x = 0$.

Si hanno i seguenti risultati, simili a quelli visti per le successioni.

1) TEOREMA DELL'UNICITÀ DEL LIMITE. Se una funzione è regolare al tendere di x a c, il suo limite è unico.

2) TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO. Se $\lim_{x\to c} f(x) = l > 0$, esiste un intorno di c in cui si ha $f(x) > 0$.

Analogamente, se $l < 0$, i valori di f saranno negativi in un intorno opportuno di c. Si giunge alla stessa conclusione se f diverge. Generalizzando questo risultato, possiamo concludere che, se $k > l$ ($k < l$), i valori della funzione saranno definitivamente minori (risp. maggiori) di k.

3) TEOREMA DI CONFRONTO PER FUNZIONI CONVERGENTI (*"teorema dei carabinieri"*). Siano f, g, h tre funzioni definite nello stesso insieme X e sia $c \in DX$. Supponiamo che $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ per ogni $x \in X$ e che, al tendere di x a c, le due funzioni f ed h abbiano lo stesso limite l. Allora, anche g tende ad l.

4) TEOREMA DI CONFRONTO PER FUNZIONI DIVERGENTI. Siano f, g due funzioni definite nello stesso insieme X e sia $c \in DX$. Supponiamo che $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in X$. Allora:

i) se $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$, allora $\lim_{x\to c} g(x) = +\infty$

ii) se $\lim_{x\to c} g(x) = -\infty$, allora $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$

Si ha poi il seguente teorema

5) TEOREMA SUL LIMITE DI UNA FUNZIONE COMPOSTA. Siano date due funzioni $f : Y \to \mathbf{R}$, $g : X \to Y$. Sia $c \in DX$ e si supponga che $\lim_{x\to c}\ g(x) = \gamma$ e che $\gamma \in DY$. Allora, se $\lim_{y\to\gamma}\ f(y) = l$, si ha, posto $F(x) = f(g(x))$, $\lim_{x\to c}\ F(x) = l$.

Osservazione. Dal Teorema 5 segue che, per una funzione composta, occorre prima esaminare il limite della funzione interna (quello che abbiamo chiamato γ) e il limite di F sarà quello a cui tende la funzione esterna quando la "sua" variabile tende a γ.

Il seguente risultato mette in relazione i limiti delle funzioni e quelli delle successioni.

6) TEOREMA PONTE. Sia data una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ e sia $c \in DX$. Si ha $\lim_{x\to c}\ f(x) = l$ (risp. $+\infty, -\infty$) se e solo se per ogni successione $\{x_n\}$ di elementi di X convergente a c si ha $f(x_n) \to l$.

Limiti sinistro e destro. Sia data una funzione $f : (a, b) \to \mathbf{R}$. Per ogni $c \in]a, b]$ il limite della restrizione di f ad $(a, c[$ al tendere di x a c si chiama *limite sinistro di f al tendere di x a c*, o *limite per x che tende a c da sinistra*, e si indica con $\lim_{x\to c^-}\ f(x)$. Per ogni $c \in [a, b[$ il limite della restrizione di f a $]c, b)$ al tendere di x a c si chiama *limite destro di f al tendere di x a c*, o *limite per x che tende a c da destra*, e si indica con $\lim_{x\to c^+}\ f(x)$. È immediato constatare che, se $c \in]a, b[$ ed esiste il $\lim_{x\to c}\ f(x)$, allora i limiti sinistro e destro coincidono con tale limite. Vale anche il viceversa: se $\lim_{x\to c^-}\ f(x) = \lim_{x\to c^+}\ f(x) = l$ (oppure $\pm\infty$), allora $\lim_{x\to c}\ f(x) = l$.

Limite al tendere di x all'infinito. Data una funzione $f : (a, +\infty[\to \mathbf{R}$, si definisce il limite di f al tendere di x a $+\infty$ nel seguente modo:

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \in \mathbf{R}$ se $\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists \bar{x} > a : x > \bar{x} \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ se $\forall k > 0 \;\; \exists \bar{x} > a : x > \bar{x} \Rightarrow f(x) > k$
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ se $\forall k > 0 \;\; \exists \bar{x} > a : x > \bar{x} \Rightarrow f(x) < -k$
In modo simile si definisce, per una funzione $f :]-\infty, a) \to \mathbf{R}$, il limite di f al tendere di x a $-\infty$. In tal caso, la condizione di convergenza, ad esempio, è la seguente:
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l \in \mathbf{R}$ se $\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists \bar{x} < a : x < \bar{x} \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

Anche in questo caso valgono i teoremi dell'unicità del limite, di confronto, della permanenza del segno e il Teorema ponte. Il teorema sul limite delle funzioni composte assume ovviamente una forma più generale, come si può vedere attraverso alcuni esempi:
$\lim_{x\to 4^-} e^{\frac{2}{x-4}} = 0$; $\lim_{x\to 0^+} \log \frac{1}{x} = +\infty$.

Utilizzando il Teorema ponte, si costruisce la tabella sulle operazioni con i limiti delle funzioni, uguale a quella per le successioni. In particolare, si hanno ancora le forme indeterminate $+\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$.

Limiti di funzioni elementari.
Premettiamo che (la proveremo in seguito) vale la seguente

PROPOSIZIONE 1. Se $f : X \to \mathbf{R}$ è una funzione elementare, per ogni $c \in X$ si ha $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

Nel seguito, tratteremo alcuni casi che non rientrano in tale condizione.

α) *Funzione esponenziale.* Sia a un numero positivo e diverso da 1. Consideriamo la funzione a^x. Per studiare il suo limite al tendere di x a $\pm\infty$ si deve distinguere se $a > 1$ oppure $0 < a < 1$. Si ha, utilizzando i risultati analoghi visti per le successioni e il Teorema ponte:
i) $a > 1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty; \lim_{x\to-\infty} a^x = 0$
ii) $0 < a < 1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} a^x = 0; \lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$

β) *Funzione logaritmo.* Sia a un numero positivo e diverso da 1. Consideriamo la funzione $\log_a x$. Per studiare il suo limite al tendere di x a 0 o a $+\infty$ si deve distinguere se $a > 1$ oppure $0 < a < 1$. Si ha, utilizzando i risultati analoghi visti per le successioni e il Teorema ponte:
i) $a > 1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty; \lim_{x\to 0} \log_a x = -\infty$
ii) $0 < a < 1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty; \lim_{x\to 0} \log_a x = +\infty$

Infine, considerata la funzione $F(x) = (f(x))^{g(x)} = e^{g(x)\log(f(x))}$ e procedendo come visto per le successioni, si trovano le seguenti tre forme indeterminate di tipo esponenziale: $(+\infty)^0$; 0^0; 1^∞.

δ) *Funzione potenza.* Esaminiamo intanto il caso della potenza con esponente intero. La funzione potenza con esponente intero positivo è definita per ogni x, quella con esponente intero negativo è definita per $x \neq 0$.

Sia allora $n \in \mathbf{R}$, si ha facilmente:
$\lim_{x\to+\infty}\ x^n = +\infty$
$\lim_{x\to-\infty}\ x^n = +\infty$ se n è pari
$\lim_{x\to-\infty}\ x^n = -\infty$ se n è dispari.
Si ha poi, tenendo presente che $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$:
se n è pari, $\lim_{x\to\pm\infty}\ x^{-n} = 0$, $\lim_{x\to 0}\ x^{-n} = +\infty$
se n è dispari, $\lim_{x\to\pm\infty}\ x^{-n} = 0$, $\lim_{x\to 0^-} x^{-n} = -\infty$, $\lim_{x\to 0^+} x^{-n} = +\infty$.

Se l'esponente è un numero α non intero, la potenza è definita solo se $x \geq 0$ se $\alpha > 0$, solo se $x > 0$ se $\alpha < 0$ e si ha:
se $\alpha > 0$, $\lim_{x\to+\infty}\ x^\alpha = +\infty$
se $\alpha < 0$, $\lim_{x\to+\infty}\ x^\alpha = 0$ e $\lim_{x\to 0}\ x^\alpha = +\infty$.

η) *Polinomi.* Consideriamo il polinomio $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$. Per $x \to \pm\infty$, a seconda dei segni dei coefficienti, la funzione potrebbe trovarsi nella forma indeterminata $+\infty - \infty$ e si procede nel seguente modo.

$f(x) = x^n(a_0 + \frac{a_1}{x}\ +\ \cdots\ +\frac{a_n}{x^n})$. La quantità fra parentesi tende ad a_0, ne segue:
$\lim_{x\to+\infty}\ f(x) = +\infty$ se $a_0 > 0$;
$\lim_{x\to+\infty}\ f(x) = -\infty$ se $a_0 < 0$;
$\lim_{x\to-\infty}\ f(x) = +\infty$ se $a_0 > 0$, n pari;
$\lim_{x\to-\infty}\ f(x) = -\infty$ se $a_0 < 0$, n pari;
$\lim_{x\to-\infty}\ f(x) = -\infty$ se $a_0 > 0$, n dispari;
$\lim_{x\to-\infty}\ f(x) = +\infty$ se $a_0 < 0$, n dispari.

In sostanza, possiamo concludere che, al tendere di x a $\pm\infty$, i polinomi divergono sempre, per capire il segno della divergenza occorre esaminare il grado di x^n e il segno del suo coefficiente.

Ad esempio:
$\lim_{x\to+\infty}(x^4 - 2x^3 + 1) = +\infty$
$\lim_{x\to+\infty}(x^5 - 2x^4 + 1) = +\infty$
$\lim_{x\to+\infty}(x^4 - 2x^6 + 1) = -\infty$
$\lim_{x\to+\infty}(x^2 - 2x^3 + 1) = -\infty$
$\lim_{x\to-\infty}(x^4 - 2x^3 + 1) = +\infty$
$\lim_{x\to-\infty}(x^5 - 2x^4 + 1) = -\infty$
$\lim_{x\to-\infty}(x^4 - 2x^6 + 1) = -\infty$
$\lim_{x\to-\infty}(x^4 - 2x^7 + 1) = +\infty$

ζ) *Funzioni razionali fratte.* Consideriamo la funzione $f(x) = \frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$. Supporremo che il numeratore e il denominatore non abbiano divisori a comune. f è definita in $\mathbf{R}$ privato degli eventuali zeri reali del denominatore. Se c è uno di tali punti, f diverge per $x \to c$. Per $x \to \pm\infty$ la funzione si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ e si procede nel seguente modo.

- se $n > m$:

la funzione, al tendere di x a $\pm\infty$, diverge; per capire il segno della divergenza occorre esaminare il segno del numeratore e del denominatore.

Ad esempio:
$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2}{x-1} = +\infty$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{2-x^3}{x-1} = -\infty$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{2-x^2}{1-x} = +\infty$
$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2}{x-1} = -\infty$
$\lim_{x\to-\infty} \frac{2-x^2}{x-1} = +\infty$
$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^5+2}{x-1} = +\infty$
$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^5+2}{1-x} = -\infty$
$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+2}{x^2-1} = -\infty$
$\lim_{x\to-\infty} \frac{2-x^5}{1-x} = +\infty$
$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4+2}{x^2-1} = +\infty$
$\lim_{x\to-\infty} \frac{2-x^6}{1-x^2} = +\infty$

- se $n = m$:

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{a_0}{b_0}$.

Ad esempio:
$\lim_{x\to-\infty} \frac{(2x-2)^3}{4-x^3} = -8$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{2-x^2}{x^2+5} = -1$

- se $n < m$:

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Ad esempio:
$\lim_{x\to-\infty} \frac{2-x}{x^3+5} = 0$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2}{x^4-1} = 0$

Alcuni limiti notevoli. Esaminiamo adesso alcuni limiti che si presentano in forma indeterminata.

Limiti notevoli con funzioni trigonometriche.

Consideriamo la funzione $f(x) = \frac{\sin x}{x}$; essa è definita per $x \neq 0$ e, per $x \to 0$, si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Utilizzando il limite notevole studiato per le successioni, si ottiene che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

e analogamente si hanno i seguenti altri limiti notevoli:

$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

Limiti notevoli di tipo esponenziale.

Utilizzando i limiti visti per le successioni, si ottengono i seguenti limiti notevoli (osserviamo che si presentano tutti in forma indeterminata):

$\lim_{x\to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

$\lim_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$

$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^a-1}{x} = a \qquad (a \in \mathbf{R})$

Confronto fra infinitesimi e fra infiniti. Una funzione che tende a zero è detta infinitesima (o "un infinitesimo"), una funzione che diverge è detta infinitamente grande (o "un infinito"). Per il confronto fra infinitesimi e fra infiniti si procede come nel caso delle successioni.

Asintoti. Un asintoto per f è una retta r tale che la distanza del generico punto del grafico di f da r tenda a zero.

- Asintoto verticale. Se la funzione f diverge (eventualmente solo da sinistra o da destra) al tendere di x a c, allora la retta r di equazione $x = c$ è detta asintoto verticale per f. Infatti, detto $P(x, f(x))$ il generico punto del grafico di f, si ha $d(P, r) = |x - c|$ che tende a zero al tendere di x a c.

-Asintoto orizzontale. Sia data una funzione $f : (a, +\infty[\to \mathbf{R}$ e si supponga che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \in \mathbf{R}$, allora la retta r di equazione $y = l$ è detta asintoto orizzontale destro per f (in modo simmetrico si introduce l'asintoto orizzontale sinistro). Infatti, detto $P(x, f(x))$ il generico punto del grafico di f, si ha $d(P, r) = |f(x) - l|$ che tende a zero al tendere di x a $+\infty$.

- Asintoto obliquo. Sia data una funzione $f : (a, +\infty[\to \mathbf{R}$ e si supponga che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty$; se f ha un asintoto, i due infiniti f e x devono essere dello stesso ordine (in quanto i punti di $gr(f)$ e quelli di r devono essere, per cosí dire, vicini) quindi il rapporto $\frac{f(x)}{x}$ deve convergere al tendere di x a $+\infty$. Se, dunque, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$, e se $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = p \in \mathbf{R}$, allora la retta r di equazione $y = mx + p$ è asintoto obliquo destro per f (in modo simmetrico si introduce l'asintoto obliquo sinistro). Infatti, detto $P(x, f(x))$ il generico punto del grafico di f, si ha $d(P, r) = \frac{|mx-f(x)+p|}{\sqrt{1+m^2}}$ che tende a zero al tendere di x a $+\infty$.

Esempio: funzioni razionali fratte. $f(x) = \frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$. Se c è un punto che annulla il denominatore, la retta di equazione $x = c$ è un asintoto verticale. Se $n = m$, la retta di equazione $y = \frac{a_0}{b_0}$ è un asintoto orizzontale destro e sinistro. Se $n < m$, la retta di equazione $y = 0$ è un asintoto orizzontale destro e sinistro. Se, infine, $n > m$, f diverge e, affinché $\frac{f(x)}{x}$ converga, deve essere $n = m + 1$: in tal caso, e solo in tal caso, si avrà un asintoto obliquo.

Limiti delle funzioni monotone. Ricordiamo (cfr. cap.1) che una funzione f è detta monotona in un intervallo (a, b) se in tale intervallo è crescente o decrescente (eventualmente strettamente crescente o decrescente). Enunciamo il seguente teorema per le funzioni strettamente crescenti in un intervallo (è possibile enunciare il teorema in modo analogo per le funzioni strettamente decrescenti).

TEOREMA SUI LIMITI DELLE FUNZIONI MONOTONE. Sia $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ una funzione strettamente crescente in (a, b). Allora:

- per ogni $c \in]a, b[$ esistono i limiti destro e sinistro di f al tendere di x a c e si ha:

$l^- = \lim_{x\to c^-} f(x) = \sup_{(a,c[} f(x) \leq f(c) \leq l^+ = \lim_{x\to c^+} f(x) = \inf_{]c,b)} f(x)$

- esistono i limiti di f al tendere di x ad a e a b e si ha:

$l^+ = \lim_{x\to a} f(x) = \inf_{]a,b)} f(x)$

$l^- = \lim_{x\to b} f(x) = \sup_{(a,b[} f(x)$

OSSERVAZIONI

1) Se a, b appartengono all'insieme di definizione, si ha $l^+ \geq f(a)$; $l^- \leq f(b)$.

2) Se f è decrescente, si ha $l^- = \lim_{x\to c^-} f(x) = \inf_{(a,c[} f(x) \geq f(c) \geq l^+ = \lim_{x\to c^+} f(x) = \sup_{]c,b)} f(x)$

Funzioni continue. Sia data una funzione $f : X \to \mathbf{R}$ e sia c un punto non isolato di X. Si dice che la funzione f è continua in c se $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$. Si dice che f è continua in X se è continua in ogni punto di X.

Dai risultati visti nel capitolo precedente si vede subito che somma, prodotto, quoziente di funzioni continue sono continue, e che una funzione composta mediante funzioni continue è continua.

Nel seguito, esporremo due importanti proprietà delle funzioni continue in un intervallo. La prima è espressa dal seguente risultato, del quale diamo solo l'enunciato.

TEOREMA DI WEIERSTRASS. Sia f una funzione reale continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Allora, f ammette minimo e massimo assoluti.

La seconda è la seguente *proprietà dei valori intermedi*. Si dice che una funzione $f : X \to \mathbf{R}$ gode della proprietà dei valori intermedi (brevemente, PVI), se, dati $\alpha, \beta \in f(X)$, con $\alpha < \beta$, per ogni $\gamma \in]\alpha, \beta[$ esiste $x \in X$ tale che $f(x) = \gamma$. In altre parole, se la funzione assume due valori assume anche tutti i valori fra essi compresi. La PVI è legata alla continuità mediante alcuni risultati che ora illustreremo.

TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI. Sia f una funzione reale continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ e si supponga che $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$ (o viceversa). Allora esiste $c \in [a, b]$ tale che $f(c) = 0$.

Dimostrazione. Posto $x_0 = \frac{a+b}{2}$, se $f(x_0) = 0$ la tesi è dimostrata, se $f(x_0) < 0$ poniamo $[a_1, b_1] = [x_0, b]$, se $f(x_0) > 0$ poniamo $[a_1, b_1] = [a, x_0]$, si ha dunque $f(a_1) < 0$, $f(b_1) > 0$, $a \leq a_1 < b_1 \leq b$, $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$. Procedendo analogamente a partire dall'intervallo $[a_1, b_1]$ e poi reiterando lo stesso ragionamento, se per un certo n si trova $f(x_n) = 0$ la tesi è dimostrata, in caso contrario si determinano due sucessioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tali che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha $f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$, $a \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n < b_n \leq b_{n-1} \leq \cdots \leq b$, $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$. La successione $\{a_n\}$ è crescente e limitata superiormente (da b), quindi converge al proprio estremo superiore $c \leq b$. Si ha poi $b_n = b_n - a_n + a_n = \frac{b-a}{2^n} + a_n \to c$. Si ha allora, per la continuità di f, $f(a_n) \to f(c)$ e $f(b_n) \to f(c)$ ma da $f(a_n) < 0$ segue $f(c) \leq 0$ e da $f(b_n) > 0$ segue $f(c) \geq 0$ quindi necessariamente $f(c) = 0$.

TEOREMA DI ESISTENZA DEI VALORI INTERMEDI (o Teorema di Darboux). Sia f una funzione reale continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ e si supponga che $f(a) \neq f(b)$, ad esempio $f(a) < f(b)$. Allora, per ogni $\gamma \in]f(a), f(b)[$ esiste $c \in [a, b]$ tale che $f(c) = \gamma$.

Dimostrazione. Consideriamo in $[a, b]$ la funzione $g(x) = f(x) - \gamma$, che è continua e agli estremi dell'intervallo assume valori di segno diverso, quindi, per il Teorema di esistenza degli zeri, si annulla in un punto c: si ha dunque $f(c) - \gamma = 0$.

OSSERVAZIONI SUL TEOREMA DI DARBOUX.

1) Se l'intervallo non è chiuso e limitato la tesi vale egualmente: basta applicare il teorema ad una restrizione.

2) Se f non è definita in un intervallo il teorema non vale: basti pensare ad esempio ad una funzione definita nell'unione di due intervalli disgiunti, costante in ciascuno di essi, con valori diversi delle costanti.

3) Il viceversa del teorema non vale: la funzione definita in $[0,1]$ ponendo $f(x) = x$ in $]0,1[$, $f(0) = 1, f(1) = 0$, verifica la PVI ma non è continua.

4) Il Teorema di esistenza degli zeri è un caso particolare del Teorema di Darboux. lo abbiamo enunciato separatamente perché lo abbiamo utilizzato nella dimostrazione.

L'ultimo teorema sulla PVI fa riferimento all'Osservazione 3) relativa al teorema di Darboux. Esso infatti afferma che la PVI garantisce la continuità se la funzione è monotona.

TEOREMA DI CONTINUITÀ DELLE FUNZIONI MONOTONE. Sia $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ una funzione strettamente monotona. Sia verificata la PVI. Allora, f è continua.

Dimostrazione. Supponiamo che f sia crescente e proviamo la continuità, ad esempio, in un punto c interno ad (a,b). Dal teorema sui limiti delle funzioni monotone segue che $l^- \leq f(c) \leq l^+$. Per provare la continuità basta provare che $l^- = f(c) = l^+$. Supponiamo per assurdo che non sia vero, ad esempio si abbia $l^- < f(c)$. Sia $\gamma \in]l^-, f(c)[$; per la PVI esiste $\bar{x} \in (a,b)$ tale che $f(\bar{x}) = \gamma$. L'assurdo segue dal fatto che $\bar{x}$ non può esistere, infatti:
- se fosse $\bar{x} = c$ si avrebbe $\gamma = f(\bar{x}) = f(c)$
- se fosse $\bar{x} < c$ si avrebbe $\gamma = f(\bar{x}) \leq l^-$
- se fosse $\bar{x} > c$ si avrebbe $\gamma = f(\bar{x}) > f(c)$

L'assurdo è dunque trovato.

Fra le conseguenze di questi teoremi, vediamo le seguenti:

Immagine di un intervallo mediante una funzione continua. Sia $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ una funzione continua. Dal teorema di Darboux segue che la sua immagine è un intervallo, e dal teorema di Weierstrass segue che f possiede minimo m e massimo M, quindi la sua immagine è l'intervallo chiuso e limitato $[m, M]$. Se, in particolare, f è crescente, la sua immagine è l'intervallo $[f(a), f(b)]$; se f è decrescente, la sua immagine è l'intervallo $[f(b), f(a)]$.

In generale, se f è una funzione continua in un intervallo generico (a,b), la sua immagine è l'intervallo $(\inf_{(a,b)} f(x), \sup_{(a,b)} f(x))$. In particolare, ricordando il teorema sui limiti delle funzioni monotone, se f è crescente in (a,b) la sua immagine è l'intervallo $(\lim_{x\to a} f(x), \lim_{x\to b} f(x))$; se f è decrescente in (a,b) la sua immagine è l'intervallo $(\lim_{x\to b} f(x), \lim_{x\to a} f(x))$.

Continuità della funzione inversa. Sia $f : [a,b] \to [f(a), f(b)]$ una funzione strettamente crescente (oppure $f : [a,b] \to [f(b), f(a)]$ una funzione strettamente decrescente) e continua. Allora, la sua funzione inversa è continua.

Continuità delle funzioni elementari. Tutte le funzioni elementari che abbiamo introdotto sono continue nei rispettivi insiemi di definizione. Sia infatti c un punto dell'insieme di definizione di f. Se c è contenuto in un intervallo in cui f è monotona, la continuità in c segue dal teorema di continuità delle funzioni monotone. In caso contrario, si verifica che i limiti sinistro e destro coincidono. Ad esempio, $\lim_{x\to 0^-} x^2 = \inf_{]-\infty,0[} x^2 = 0 = \lim_{x\to 0^+} x^2 = \inf_{]0,+\infty[} x^2$.

Punti di discontinuità. Data una funzione $f : X \to \mathbf{R}$, un punto $c \in DX$ è detto punto di discontinuità per f in uno dei seguenti casi:

- se f non è definita in c: ad esempio, $f(x) = \log x$, $c = 0$

- se f non è dotata di limite al tendere di x a c: ad esempio, $f(x) = \frac{|x|}{x}$, $c = 0$

- se $\lim x \to c\ f(x) \neq f(c)$: ad esempio, $f(x) = x$ per $x \neq 0$, $f(0) = 5$, $c = 0$

Sia c un punto di discontinuità.

- Diremo che c è *eliminabile* se il limite di f al tendere di x a c esiste finito (sia l): in tal caso infatti la funzione definita da $g(x) = f(x)$ se $x \neq c$, $g(c) = l$ è continua in c (prolungamento per continuità di f). Ad esempio, è possibile provare che $\lim_{x\to 0} x^x = 1$, ponendo allora $g(x) = x^x$ se $x > 0$, $g(0) = 1$ si ottiene una funzione continua.

- Diremo che c è *di prima specie* se i limiti $l^- = \lim_{x\to c^-} f(x)$ e $l^+ = \lim_{x\to c^+} f(x)$ esistono entrambi finiti ma distinti, in tal caso il numero $|l^- - l^+|$ è detto *salto* di f in corrispondenza di c. Ad esempio, $f(x) = x$ se $x \in [0, 1[$, $f(x) = x + 3$ se $x \in [1, 4]$, $c = 1$: il salto è 3.

- Diremo che c è un *punto di infinito* se f diverge al tendere di x a c (anche se solo da destra o solo da sinistra). Per quanto visto prima, se c è un punto di infinito per f, la retta di equazione $x = c$ è un asintoto verticale per f.